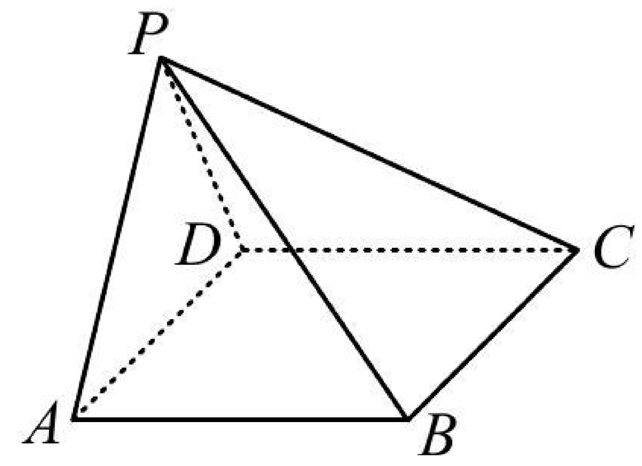
第 2 节 垂直关系证明思路大全（★★☆）

强化训练

1．（2023 • 上海模拟 • ★★）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^{\circ}$，证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.



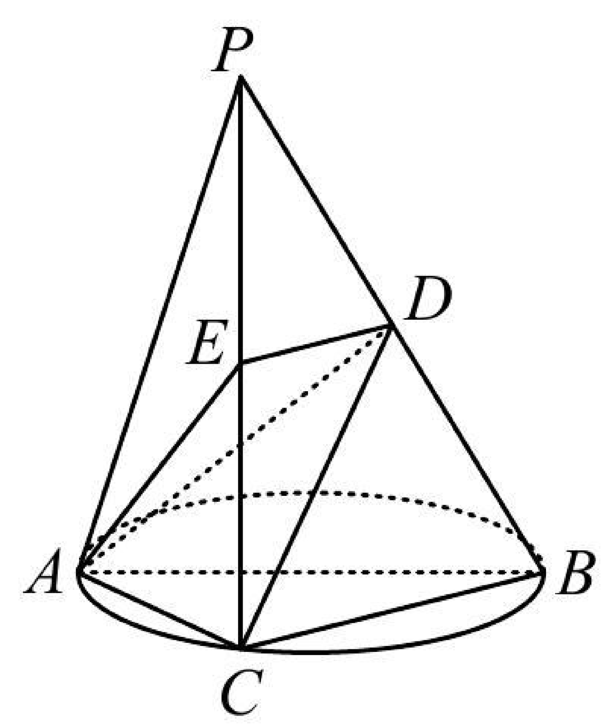
证明：（要证面面垂直，又已知交线，故只需在一个面内找与交线垂直的直线，它必垂直于另一个面，条件中已有 $\angle BAP=90^{\circ}$，所以就证 $AB\perp$ 平面 PAD）

因为 $\angle BAP=\angle CDP=90^{\circ}$，所以 $AB\perp PA$，$CD\perp PD$，又 $AB//CD$，所以 $AB\perp PD$，

因为 PA，$PD\subset$ 平面 PAD，$PA\cap PD=P$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，

又 $AB\subset$ 平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

2．（2023 • 四川成都模拟 • ★★）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，AB 是 ΔABC 的外接圆直径，PC 垂直于圆所在的平面，D，E 分别是棱 PB，PC 的中点，证明：$DE\perp$ 平面 PAC.



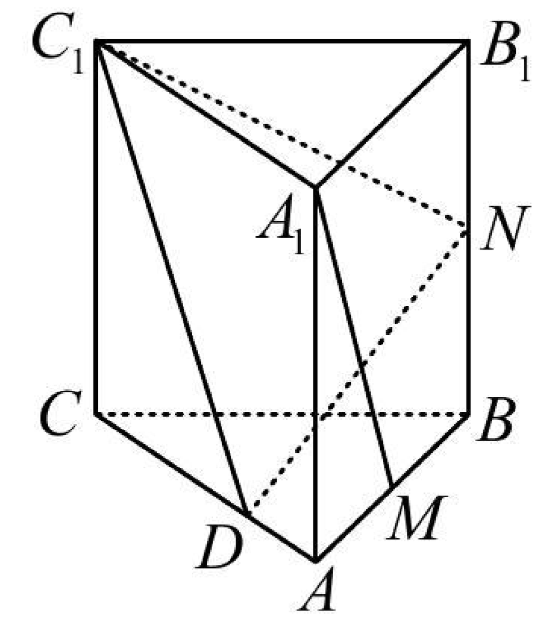
证明：（D，E 都是中点，联想到中位线，故可借助 $DE//BC$ 把结论转化为证 $BC\perp$ 平面 PAC）

由题意，$PC\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp PC$，又 AB 是 ΔABC 的外接圆直径，所以 $BC\perp AC$，

因为 PC，$AC\subset$ 平面 PAC，$PC\cap AC=C$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，

又 D，E 分别是棱 PB，PC 的中点，所以 $DE//BC$，故 $DE\perp$ 平面 PAC.

3．（2022 • 云南昆明模拟 • ★★）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为正方形，$\angle CAB=90^{\circ}$，$AC=AB=2$，M，N 分别为 AB 和 BB_1 的中点，D 为棱 AC 上的点，证明：$A_1M\perp DN$.



证明：（观察发现 A_1M 在面 ABB_1A_1 内，DN 在该面的投影好找，即为 AN，故由三垂线定理想到只需证 $A_1M \perp AN$）

如图，连接 AN，因为 $\angle CAB = 90^\circ$，所以 $DA \perp AB$，又 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，

而 $DA \subset$ 平面 ABC，所以 $DA \perp AA_1$，结合 AB，AA_1 是平面 ABB_1A_1 内的相交直线可得 $DA \perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $A_1M \subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $DA \perp A_1M$ ①，（再证 $AN \perp A_1M$，可在面 ABB_1A_1 内分析）

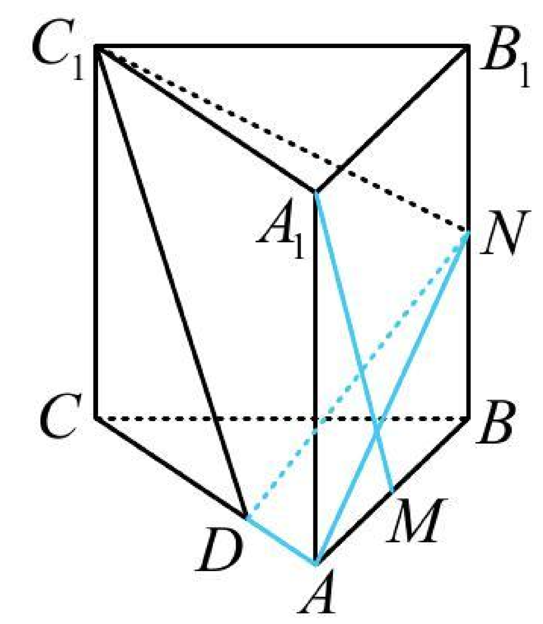
由题意，$AB = AA_1 = 2$，所以 ABB_1A_1 为正方形，故 $BN = AM = 1$，

所以 $\tan\angle NAB = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{1}{2}$，$\tan\angle AA_1M = \dfrac{AM}{AA_1} = \dfrac{1}{2}$，故 $\angle NAB = \angle AA_1M$，

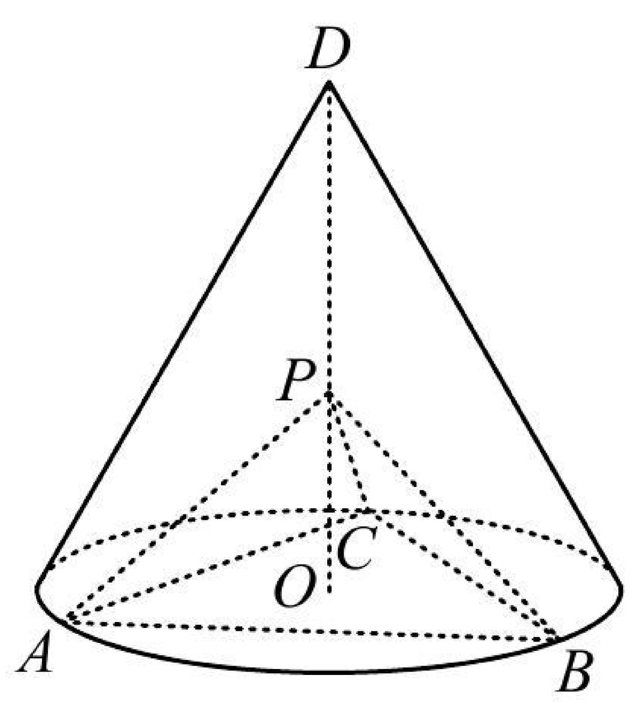
又 $\angle AA_1M + \angle AMA_1 = 90^\circ$，所以 $\angle NAB + \angle AMA_1 = 90^\circ$，故 $AN \perp A_1M$ ②，

由①②结合 DA，AN 是平面 DAN 内的相交直线可得 $A_1M \perp$ 平面 DAN，

又 $DN \subset$ 平面 DAN，所以 $A_1M \perp DN$.



4．（2020•新课标Ⅰ卷•★★）如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，ΔABC 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC = 90^\circ$，证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PAC.



证法 1：（要证面面垂直，又已知交线，故只需在一个面内找与交线垂直的直线，它必垂直于另一个面，由 $\angle APC = 90^\circ$ 可发现应选 PC，证 $PC \perp$ 平面 PAB 即可，而要证这一结果，还需证 PC 与 AB 或 PB 垂直，下面先考虑证 $PC \perp AB$，注意到 PC 在面 ABC 内的射影是 CO，故只需证 $AB \perp CO$）

如图 1，连接 CO 并延长，交 AB 于点 G，则 G 为 AB 中点，且 $AB \perp CG$，

由题意，$PO \perp$平面ABC，$AB \subset$平面ABC，所以$AB \perp PO$，又CG，PO是平面POC内的相交直线，

所以$AB \perp$平面POC，因为$PC \subset$平面POC，所以$AB \perp PC$，

由题意，$\angle APC = 90^\circ$，所以$PA \perp PC$，又PA，$AB \subset$平面PAB，$PA \cap AB = A$，所以$PC \perp$平面PAB，

因为$PC \subset$平面PAC，所以平面$PAB \perp$平面PAC.

证法 2：（也可通过证$PC \perp PB$来证$PC \perp$平面PAB，只需证$\Delta PAC \cong \Delta PBC$，观察发现又只需证$PA = PB$，要证这一结果，可通过证$\Delta POA \cong \Delta POB$来完成）

如图 2，连接OA，OB，则$OA = OB$，由题意，$PO \perp$平面ABC，OA，$OB \subset$平面ABC，

所以$PO \perp OA$，$PO \perp OB$，故$\angle POA = \angle POB = 90^\circ$，结合$PO = PO$可得$\Delta POA \cong \Delta POB$，所以$PA = PB$，

又ΔABC是正三角形，所以$AC = BC$，结合$PC = PC$可得$\Delta PAC \cong \Delta PBC$，所以$\angle BPC = \angle APC = 90^\circ$，

故$PC \perp PB$，$PC \perp PA$，又PA，$PB \subset$平面PAB，$PA \cap PB = P$，所以$PC \perp$平面PAB，

因为$PC \subset$平面PAC，所以平面$PAB \perp$平面PAC.

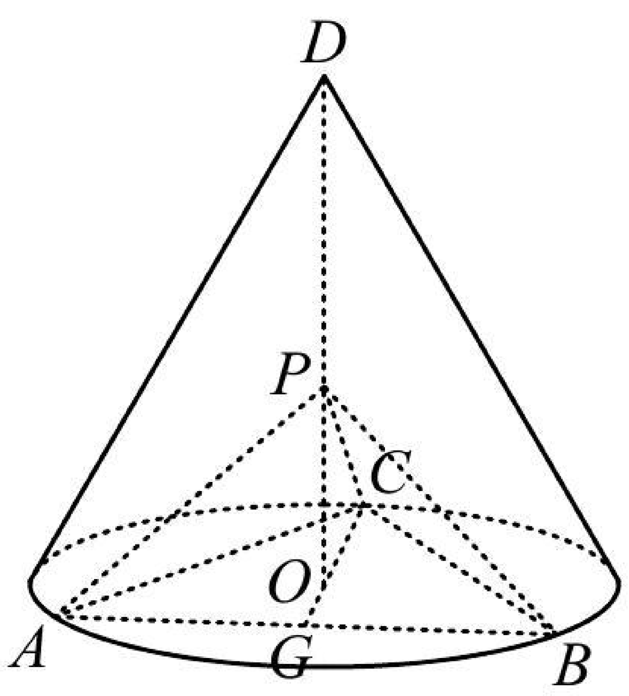


图1

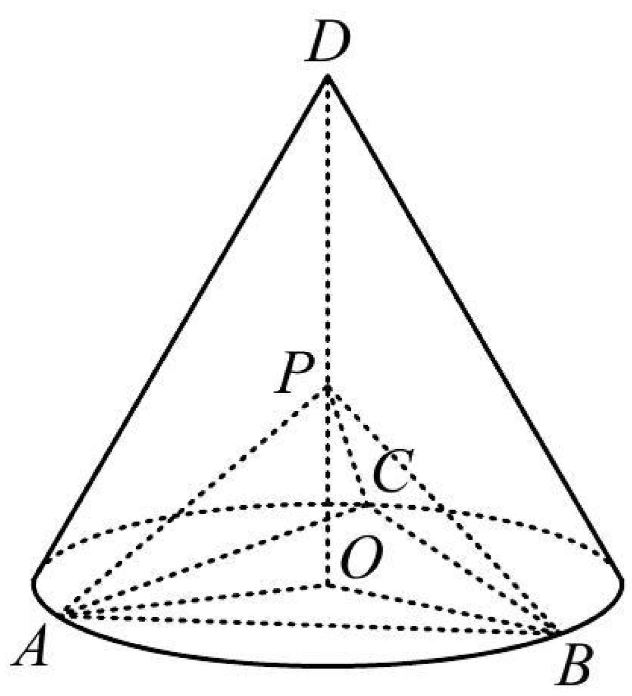
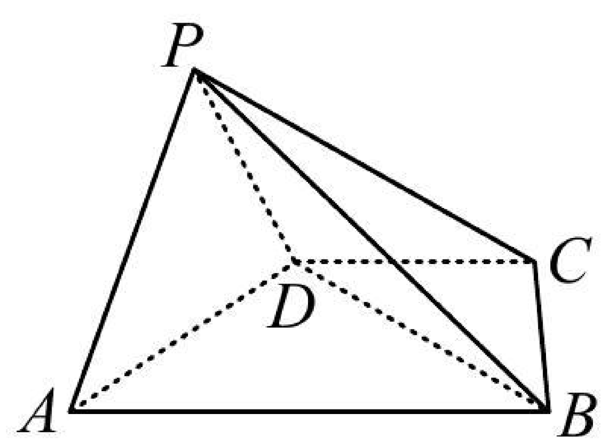


图2

5．（2023•陕西榆林一模•★★）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAD \perp$平面$ABCD$，$AB // CD$，$\angle DAB = 60^\circ$，$PA \perp PD$，且$PA = PD = \sqrt{2}$，$AB = 2CD = 2$，证明：$AD \perp PB$.

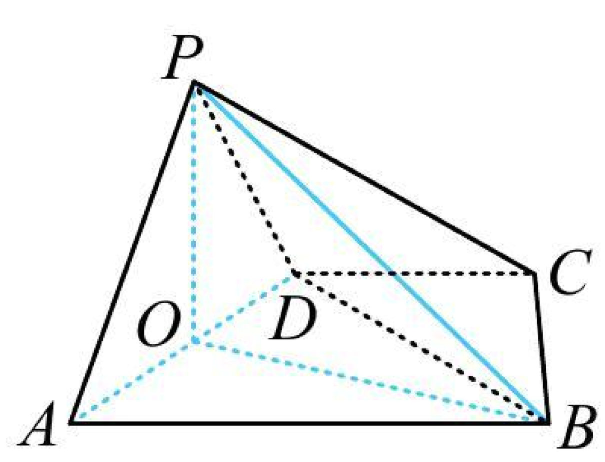


证明：（条件中有面$PAD \perp$面$ABCD$，可构造线面垂直，找到PB在平面$ABCD$内的投影，结合三垂线定理，我们发现只需证AD与该投影垂直即可）

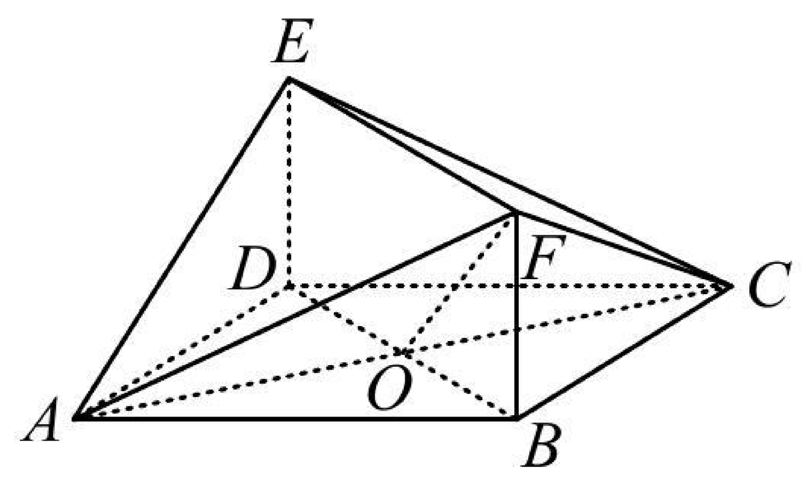
如图，取AD中点O，连接OP，OB，因为$PA = PD = \sqrt{2}$，所以$PO \perp AD$，又$PA \perp PD$，所以$AD = 2$，

因为$AB = 2$，$\angle DAB = 60^\circ$，所以ΔADB是正三角形，故$AD \perp OB$，

因为OP，$OB \subset$平面POB，$OP \cap OB = O$，所以$AD \perp$平面POB，又$PB \subset$平面POB，所以$AD \perp PB$.



6．（2023•吉林模拟•★★★）如图，在多面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$为菱形，且$\angle DAB = 60^\circ$，四边形$BDEF$为矩形，$BD = 2BF = 2$，AC与BD交于点O，$FA = FC$，证明：$DE \perp$平面$ABCD$.



证明：（要证 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，需在面 $ABCD$ 内找两条相交直线与 DE 垂直，其中 BD 是给的，另一条选谁呢？AB，AD，还是 AC？观察发现应选 AC，因为条件中与 AC 有关的垂直较多，如菱形对角线垂直，故接下来证 $DE\perp AC$，若无思路，可考虑逆推法，假设 $DE\perp AC$，结合 $AC\perp BD$ 可知 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，所以通过证 $AC\perp$ 平面 $BDEF$ 来证 $AC\perp DE$，而要证这一线面垂直，除 $AC\perp BD$ 外，还可用 $FA=FC$）

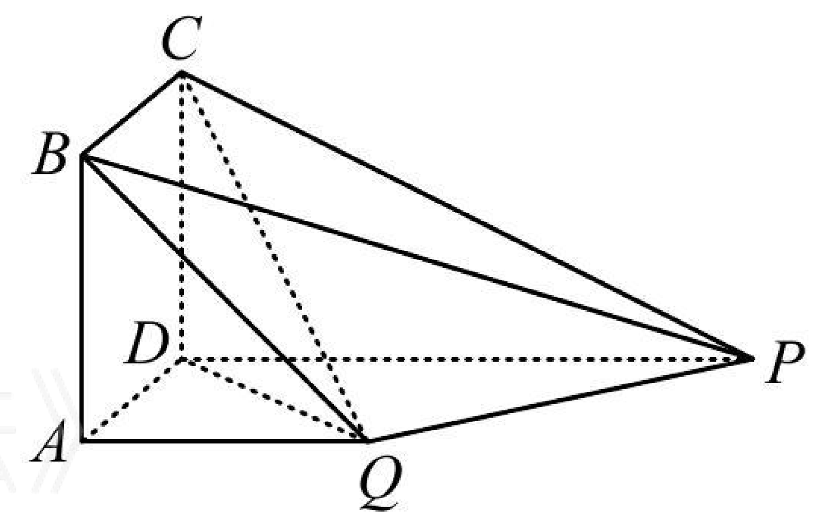
因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，且 O 为 AC 中点，又 $FA=FC$，所以 $AC\perp OF$，

因为 BD，$OF\subset$ 平面 $BDEF$，$BD\cap OF=O$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，又 $DE\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $DE\perp AC$，

因为四边形 $BDEF$ 为矩形，所以 $DE\perp BD$，

结合 BD，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\cap AC=O$ 可得 $DE\perp$ 平面 $ABCD$.

7．（2023·浙江杭州模拟·★★★）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AQ/\!/PD$，$PD=2QA=2AB$，证明：$PQ\perp$ 平面 DCQ.



证明：（要证 $PQ\perp$ 平面 DCQ，需证 $PQ\perp$ 平面 DCQ 内的两条相交直线，观察图形发现不外乎在 CD，DQ，CQ 中选，先看条件中已有的垂直关系，我们发现与 CD 有关的垂直较多，故其中一条选 CD）

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 AD，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp PD$，$CD\perp PD$，

又 $ABCD$ 是正方形，所以 $CD\perp AD$，结合 PD，AD 是平面 $ADPQ$ 内的相交直线可得 $CD\perp$ 平面 $ADPQ$，

因为 $PQ\subset$ 平面 $ADPQ$，所以 $PQ\perp CD$ ①，

（条件中还有 $PD=2QA=2AB$，可用它分析 ΔPDQ 的三边长，用勾股定理证明 $PQ\perp DQ$）

不妨设 $QA=AB=1$，则 $AD=1$，$PD=2$，因为 $AD\perp PD$，$AQ/\!/PD$，所以 $AQ\perp AD$，

从而 ΔADQ 是等腰直角三角形，故 $DQ=\sqrt{2}$，且 $\angle ADQ=45^{\circ}$，所以 $\angle PDQ=45^{\circ}$，

在 ΔPDQ 中，由余弦定理，$PQ^2=PD^2+DQ^2-2PD\cdot DQ\cdot\cos\angle PDQ=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos45^{\circ}=2$，

所以 $DQ^2+PQ^2=4=PD^2$，故 $PQ\perp DQ$ ②，

由①②以及 CD，DQ 是平面 DCQ 内的相交直线可得 $PQ\perp$ 平面 DCQ.